PC : colle n° 12

Du 15 au 19 décembre

Thème : séries de fonctions

Documents utiles : TD12

1 Questions de cours

- (*Déf. 4 + rmq. + exe. 6*) Définition de la convergence uniforme + reformulation utilisant le reste + montrer que la série de fonctions $\sum f_n$, où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$, converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

  En pratique, on montre la convergence uniforme en montrant que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  Pour l'exemple, on justifie que la série vérifie les hypothèse du critère spécial des séries alternées. On a alors la convergence simple de la série (et donc l'existence du reste) puis on utilise la majoration du reste pour la CVU.

- (*Déf. 7 + prop. 11*) Définition de la convergence normale + Lien avec la convergence uniforme (énoncé + démonstration).

  Pour la démonstration, on montre d'abord la convergence simple par comparaison. Ensuite, on majore les restes « partiels » $\sum\limits_{k=n+1}^{N} f_k(x)$ par inégalité triangulaire, puis on passe à la limite lorsque $N \to +\infty$ (en justifiant qu'on obtient les restes de séries convergentes) et enfin on passe au sup.

- (*Thm. 19 + 21*) Théorème d'intégration terme à terme + théorème de dérivation terme à terme (énoncés).

  D'après le programme officiel, en pratique, l'hypothèse du théorème d'intégration terme à terme concernant la continuité par morceaux de la somme peut être omise.

2 Exercice imposé

Appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

$\rightsquigarrow$ *Savoir faire l'exercice 7 (a et b) du TD12.*

3 Exercices libres

- Étudier la convergence simple d'une série de fonctions pour savoir quand sa somme est bien définie.
- Étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions (très souvent dans le cas d'une série alternée).
- Étudier la convergence normale d'une série de fonctions, savoir que cette convergence entraîne les autres.
- Utiliser le théorème de la double limite pour déterminer une limite ou un équivalent.
- Régularité d'une série de fonctions : théorèmes de continuité, de dérivation terme à terme, de classe $\mathcal{C}^p$.